

به نام خدا

معادلات دیفرانسیل

۱- آیا $y = e^{2x}$ جواب معادله ی $y'' - 5y' + 6y = 0$ است

حل:

$$y' = 2e^{2x}, y'' = 4e^{2x}$$

$$4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0, \quad \forall x$$

۲- مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل را تعیین کنید

مرتبه اول و درجه دوم $(y')^2 + y^2 = 1$ a)

مرتبه دوم ولی برای آن درجه تعریف نمی شود $e^y y^x + 2 = 1^2$ b)

مرتبه ۲ و درجه ۲ $(y'')^2 + (y')^3 - y = x$ 3)

۳- معادله دیفرانسیل منفی زیر را به دست آورید.

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

حل:

$$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x, y'' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x$$

$$y'' + y = 0 \Rightarrow y'' = -y$$

۴- معادله دیفرانسیل همه دوایری که از تقاطع دایره $x^2 + y^2 = 1$ و خط $y=x$ می

گذرد را بدست آورید.

$$\text{حل: } x^2 + y^2 - 1 + c(y - c) = 0 \Rightarrow 2x + 2yy' + cy' - c = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 2(y')^2 + 2yy'' + cy'' = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 + c(y - x) = 0$$

$$c = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{y - x} \Rightarrow \frac{1 - (x^2 + y^2)}{y - x} y'' + 2yy'' + 2 + 2(y')^2 = 0$$

۵- معادله ی زیر را حل کنید

$$2x(y + 1)dx + (x^2 - 1)dy = 0$$

حل : با تقسیم طرفین معادله بر $(y + 1)(x^2 - 1)$ متغیرها جدا می شوند.

$$\frac{2}{x^2 - 1} dx + \frac{1}{y + 1} dy = 0 \stackrel{s}{\Rightarrow}$$

$$\ln|x^2 - 1| + \ln|y + 1| = c \Rightarrow \ln|(x^2 - 1)(y + 1)| = c$$

$$\Rightarrow |(x^2 - 1)(y + 1)| = c^2 \Rightarrow (x^2 - 1)(y + 1) = \mp c^2$$

$$1f \quad c_1 = \pm e^c \Rightarrow (x^2 - 1)(y + 1) = c_1$$

۶- آیا تابع مقابل همگن است؟

$$f(x + y) = x^2 + xy$$

حل :

$$f\lambda = \lambda x^2 + \lambda^2 xy = \lambda^2(x + yx) = \lambda^2 f(x, y)$$

همگن از درجه ۲

۷- معادله زیر را حل کنید .

$$(3x^2 + 4xy^2)dx + (2y - 3y^2 + 4x^2y)dy = 0$$

حل :

$$Nx = 8xy, My = 8xy$$

$$3x^2dx + (4xy^2dx + 4x^2ydy) + (2y - 3y^2)dy = 0$$

$$\Rightarrow dx^3 + d(2x^2y^2) + d(y^2 - y^3) = 0$$

$$\int \rightarrow d(x^3 + 2x^2y^2 + y^2 - y^3) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2y^2 + y^2 - y^3 = c$$

۸- یک عامل انتگرال ساز برای معادله

$$(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy = 0 \text{ بدست آورید.}$$

حل :

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{4x + 6y - 2x - 2y}{2xy + x^2} = \frac{2x + 4y}{x(x + 2y)} = \frac{2}{x}$$

۹- جواب عمومی معادله ی مرتبه اول $y' + 1y = \frac{1}{1+e^{2x}}$ بدست آورید.

حل : معادله خطی است

$$\Psi(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$$

$$y = e^{-x} \left[\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} + c \right] \Rightarrow y = e^{-x} [\tan^{-1}(e^x) + c]$$

۱۰- معادله ی کلرو زیر را حل کنید .

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$$

حل : معادله داده شده را با قرار دادن $y' = p$ می نویسیم

$$y = xp - \frac{1}{4}p^2 \Rightarrow$$

$$f(p) = -\frac{p^2}{4} \xrightarrow{p=c} y = cx - \frac{c^2}{4}$$